LE THÉORÈME DE FINITUDE DE WIESEND

par

Jean-Baptiste Teyssier

Cette note détaille la preuve du théorème de finitude de Wiesend suivant [**Ker11**].

Théorème. — Soit X un schéma arithmétique régulier et soit U un sous-groupe normal ouvert du groupe de classe $C(X)$ de X. Alors U est d'indice fini dans $C(X)$[(1)].

Ce résultat a fait l'objet de l'exposé de Giulia Battiston au séminaire "Théorie du corps de classe en dimension supérieure et ramification" organisé par Hélène Esnault.

1. Preuve du théorème de finitude

On commence par faire quelques remarques générales. On utilisera librement les notations de [**Ker11**]. Soit $x \in |X|$. On note N_x l'ordre de la classe de x dans $C(X)/U$. Par théorème d'existence faible [**Ker11**, 7.3], il suffit de borner cet ordre pour x variant dans $|X|$.

1.1. Interprétation galoisienne de N_x. Stratégie d'attaque. — On se donne $x \in |X|$ et on note $\kappa(x)$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_{X,x}$. Si U provient d'un sous-groupe ouvert V de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$, la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}x \arrow[r] \arrow[d] & G_{\kappa(x)} \arrow[d] \\
C(X) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \arrow[d] \\
C(X)/U \arrow[r, hook] & \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)/V := G
\end{tikzcd}$$

(1) C'est nécessaire si l'on veut bien croire que U provient d'un sous-groupe ouvert de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$.

assure que N_x s'interprète comme l'ordre de l'image de Frob_x dans le groupe de Galois G du revêtement de X associé à V. Donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}(\pi_1^{\mathrm{ab}}(X), G) \simeq H^1(X, G) \tag{1.1.1}$$

donne l'inégalité

$$N_x \leq \mathrm{ord}(\pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \longrightarrow G) \leq \sharp H^1(X, G)$$

Le point est que l'on dispose toujours du membre de droite de (1.1.1).

Si $i : \mathcal{C} \hookrightarrow X$ est une courbe arithmétique tracée sur X dont x est un point régulier, on peut appliquer la théorie du corps de classe au sous-groupe ouvert $i_*^{-1}(U)$ de $C(\mathcal{C})$. Le caractère injectif de

$$C(\mathcal{C})/i_*^{-1}(U) \longrightarrow C(X)/U$$

montre que l'ordre de x dans $C(\mathcal{C})/i_*^{-1}(U)$ est N_x. Si G est le groupe de Galois du revêtement de $\mathcal{C}$ associé à $i_*^{-1}(U)$, alors N_x est l'ordre de Frob_x dans G[(2)] et on a

$$N_x \leq \sharp H^1(\mathcal{C}, G)$$

Il est néanmoins illusoire de pouvoir borner les $\sharp H^1(\mathcal{C}, G)$ car

(1) $\mathcal{C}$ varie sur toutes les courbes sur X.
(2) On a pas vraiment de contrôle sur G.

Une façon de minimiser le problème (1) est de diminuer la liberté du choix de $\mathcal{C}$ en feuilletant X suivant des courbes. C'est possible grâce aux bons voisinages d'Artin [**Gro73**, XI 3.1]. Le prix à payer pour cela est la nécessité de travailler localement sur $X_{\text{ét}}$. Cette réduction sera faite en 1.2.

Pour contrôler G dans une certaine mesure, on peut exploiter l'observation que $C(X)/U$ est un groupe abélien de torsion en écrivant sa décomposition ℓ-primaire

$$C(X)/U \simeq \bigoplus C(X)/U_\ell$$

avec $U \subset U_\ell$ qui est tel que les ordres des éléments de $C(X)/U_\ell$ sont des puissances de ℓ. Si on s'est ramené à démontrer le théorème de finitude pour U_ℓ, c'est un progrès vis-à-vis du problème (2) car alors G peut être supposé de la forme $\mathbb{Z}/\ell^n$. Cette réduction sera traitée en 1.4.

On peut même considérer tous les $\mathbb{Z}/\ell^n$ d'un coup en considérant $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \simeq \varinjlim \mathbb{Z}/\ell^n$. Pour $\mathcal{C}$ courbe courant sur l'ensemble des fibres de la fibration d'Artin envisagée, on aspire à montrer que la collection des entiers

$$H^1(\mathcal{C}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \simeq \varinjlim H^1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}/\ell^n)$$

est majorée, où l'identification provient de [**Gro72**, VII 3.3]. On sera à même de mener ceci à bien seulement sur un sous-ensemble assez gros de $|X|$. Ce sera l'objet de 1.6. Une subtile application du théorème de Chebotarev permettra néanmoins de conclure.

(2) En particulier, N_x est fini et ainsi le groupe $C(X)/U$ est de torsion.

1.2. Réduction au cas d'une fibration d'Artin. — Par définition, le morphisme $X \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ est de type fini avec X régulier. En particulier, $X_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est lisse de type fini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors [**Gro73**, XI 3.3] prédit l'existence d'un ouvert $Y \hookrightarrow X_{\overline{\mathbb{Q}}}$ et d'un diagramme commutatif

(1.2.1)
$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "p"'] & \overline{Y} \arrow[d, "\overline{p}"] & Z \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl, "\overline{p}_Z"] \\
& W \arrow[d] & \\
& \operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Q}} &
\end{tikzcd}$$

avec

(a) $\overline{p}$ projectif lisse à fibres géométriques irréductibles de dimension 1.
(b) W lisse[(3)] de dimension $\dim X - 1$.
(c) $\overline{p}_Z$ étale.

Puisque tous les schémas intervenant dans (1.2.1) s'écrivent à l'aide d'un nombre fini d'équations, on peut supposer que (1.2.1) est défini sur un corps de nombre K.

Par le même argument de finitude, on peut supposer que (1.2.1) est défini sur un ouvert de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Mais attention ! Ce faisant, on y perd éventuellement la lissité des schémas en jeu ainsi que (c) et la lissité de $\overline{p}$ dans (a). Ceci peut néanmoins se réparer en rétrécissant cet ouvert convenablement. On note S le schéma ainsi obtenu, qu'on peut toujours supposer étale sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "p"'] & \overline{Y} \arrow[d, "\overline{p}"] & Z \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl, "\overline{p}_Z"] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "p"'] & \overline{Y} \arrow[d, "\overline{p}"] & Z \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl, "\overline{p}_Z"] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "p"'] & \overline{Y} \arrow[d, "\overline{p}"] & Z \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl, "\overline{p}_Z"] \\
& W \arrow[d] & & & W \arrow[d] & & & W \arrow[d] & \\
& \operatorname{Spec} K \arrow[rrr] & & & \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K & & & S \arrow[lll] &
\end{tikzcd}$$

Alors, Y est un ouvert de X_S comme cherché[(4)], avec $X_S \longrightarrow X$ étale.

1.3. Comportement par morphisme étale. — Ainsi, pour pouvoir se ramener au cas d'une fibration d'Artin, on doit démontrer que si $f : X' \longrightarrow X$ est un morphisme étale induisant un revêtement galoisien de son image, alors le théorème de finitude vaut pour U dès qu'il vaut pour le sous-groupe ouvert $f_*^{-1}(U)$ de $C(X')$.

[(3)] W est de plus construit comme ouvert d'un certain espace projectif sur $\overline{\mathbb{Q}}$. En particulier, W provient par extension des scalaires d'un schéma lisse sur un corps de nombre.

[(4)] Idest avec (a), (b), (c) satisfaits (Ok pour (b) et (c), mais comment voir dans (a) que les fibres géométriques de $\overline{p}$ sont encore irréductibles?)

Pour le voir, on part de la suite exacte courte
(1.3.1)
$$0 \longrightarrow C(X')/f_*^{-1}(U) \longrightarrow C(X)/U \longrightarrow C(X)/(f_*(C(X'))+U) \longrightarrow 0$$

et on suppose que le membre de gauche de (1.3.1) est fini. Par théorème d'existence faible, il suffit de montrer que $C(X)/U$ est d'exposant fini. Par exactitude, il suffit pour cela de montrer que le membre de droite de (1.3.1) est d'exposant fini.

Or par définition du morphisme $f_* : C(X') \longrightarrow C(X)$, pour tout point $x \in X'$, on a $f_*(x) = [\kappa(f(x)) : \kappa(x)]f(x)$. Puisque l'entier $[\kappa(f(x)) : \kappa(x)]$ divise le degré d du morphisme étale f, on en déduit que le morphisme

$$d\cdot : C(X)/(f_*(C(X'))+U) \longrightarrow C(X)/(f_*(C(X'))+U)$$

s'annule sur le sous-groupe

$$H := \operatorname{Im}\left(\oplus_{y\in f(X')}\mathbb{Z}y \longrightarrow C(X)/(f_*(C(X'))+U)\right)$$

de $C(X)/(f_*(C(X'))+U)$. Or par régularité de X, on sait d'après [**Ker11**, 4.5] que H est dense dans $C(X)/(f_*(C(X'))+U)$. On en déduit[(5)] que $C(X)/(f_*(C(X'))+U)$ est d'exposant d.

1.4. Réduction au cas $U = U_\ell$. — D'après 1.3 et 1.2, on peut supposer que X est fibré en courbes. Avec les notations de 1.2, on peut alors raisonner par récurrence et supposer que le théorème de finitude est acquis pour W.

Commençons par une observation d'ordre général. Par théorème de Katz-Lang[(6)] [**KL81**], le terme de gauche de la suite exacte[(7)]

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{ab}}(W) \longrightarrow 0$$

est fini. Quitte à effectuer un changement de base de la situation via un morphisme étale $W' \longrightarrow W$ idoine (ce que l'on peut toujours faire par 1.3), on peut toujours supposer d'après [**GD67**, 17.16.3] que le morphisme $p : X \longrightarrow W$ admet une section s. On en déduit une identification

$$\pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \simeq \operatorname{Ker} \times s_*(\pi_1^{\mathrm{ab}}(W))$$

(5) Ce n'est pas totalement immédiat car $C(X)$ n'est même pas séparé, donc il n'est par exemple pas vrai que deux applications $f, g : C(X) \longrightarrow C(X)$ coïncidant sur un sous-ensemble dense sont égales. Par contre, pour tout sous-groupe ouvert U de $C(X)$, le quotient $C(X)/U$ est séparé. Pour le voir, notons $\pi : I(X) \longrightarrow C(X)$ le morphisme canonique. On a $C(X)/U \simeq I(X)/\pi^{-1}(U)$. Or $I(X)$ est séparé, et puisque $\pi^{-1}(U)$ est un sous-groupe ouvert de $I(X)$, cela en est aussi un sous-groupe fermé. On conclut alors avec le fait que le quotient d'un groupe topologique séparé par un sous-groupe topologique fermé est séparé.
Dans le cas qui nous occupe, $f_*(C(X')) + U$ est ouvert dans $C(X)$ car U l'est.

(6) Toutes les conditions sont réunies: quitte à rétrécir W (c'est loisible par 1.3), on peut supposer p surjectif, W est connexe et normal par propriété de permanence des morphismes lisses [**Gro71**, I 3.1], etc.

(7) L'exactitude à droite n'est pas totalement triviale. Voir [**KL81**, Lemme 2].

En particulier, si U provient d'un sous-groupe ouvert V de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$, on a

$$\mathrm{Ker} \simeq \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)/s_*(\pi_1^{\mathrm{ab}}(W)) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)/V \hookleftarrow C(X)/U$$

dès que V contient $s_*(\pi_1^{\mathrm{ab}}(W))$. Par commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \arrow[d] \\ C(W) \arrow[r] \arrow[u, bend left, "s_*"] & \pi_1^{\mathrm{ab}}(W) \arrow[u, bend right, "s_*"'] \end{tikzcd}$$

et par $U = \rho^{-1}(V)$, c'est équivalent à dire que U contient $s_*(C(W))$. En terme galoisien, c'est juste dire que la restriction à W du revêtement étale de X associé à V est triviale.

On observe que l'inclusion $s_*(\pi_1^{\mathrm{ab}}(W)) \subset V$ peut toujours être obtenue après changement de base étale sur W associé au sous-groupe $s_*^{-1}(V)$ de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(W)$, qui est aussi le groupe associé à $s_*^{-1}(U)$ par la théorie du corps du classe pour les schémas arithmétiques de dimension $< \dim X$.

On en déduit que si on écrit la décomposition ℓ-primaire

$$C(X)/U \simeq \bigoplus C(X)/U_\ell \quad , \quad U \subset U_\ell$$

de $C(X)/U$ et si on suppose que le théorème de finitude vaut pour les ouverts U_ℓ, alors $C(X)/U_\ell$ est fini pour tout ℓ et trivial pour presque tout ℓ dès que l'inclusion $s_*(C(W)) \subset U$ vaut. Cela donne exactement la finitude de $C(X)/U$.

Il ne reste qu'à se ramener au cas où U contient $s_*(C(W))$. Il faut pour cela trouver le bon revêtement étale de W. Etant donnée la discussion précédente, il est maintenant aisé à deviner: par récurrence, on sait que $s_*^{-1}(U)$ est d'indice fini dans $C(W)$ donc par théorème d'existence faible, $s_*^{-1}(U)$ provient d'un sous-groupe ouvert V de $C(W)$. Notons $f_W : W' \longrightarrow W$ le revêtement étale de W associé à V, et considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f_X"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ W' \arrow[r, "f_W"'] \arrow[u, bend left, "s'"] & W \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

D'après 1.3, il suffit de montrer le théorème de finitude pour $f_{X*}^{-1}(U)$. En contemplant les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} C(X') \arrow[r] & C(X) \\ C(W') \arrow[r] \arrow[u, "s'_*"] & C(W) \arrow[u, "s_*"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C(W') \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1^{\mathrm{ab}}(W') \arrow[d] \\ C(W) \arrow[r] & \pi_1^{\mathrm{ab}}(W) \end{tikzcd}$$

on a la chaine d'égalités

$$s_*'^{-1} f_{X*}^{-1}(U) = f_{W*}^{-1} s_*^{-1}(U) = f_{W*}^{-1} \rho_W^{-1}(V) = \rho_{W'}^{-1} f_{W'*}^{-1}(V) = \rho_{W'}^{-1}(\pi_1^{\mathrm{ab}}(W')) = C(W')$$

ce qui permet de conclure.

1.5. Réduction à l'étude de $H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$. Finitude.— On fixe dans la suite un nombre premier ℓ et on souhaite démontrer le théorème de finitude avec l'hypothèse supplémentaire que tout élément de $C(X)/U$ est de ℓ^n-torsion, pour n assez grand. D'après 1.3, on peut toujours se placer après changement de base $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\ell^{-1}] \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et supposer ainsi que ℓ est inversible sur W.

Notons $i_w : \mathcal{C}_w \hookrightarrow X$ la fibre de $p : X \longrightarrow W$ au-dessus d'un point $w \in |W|$, et soit $\overline{w}$ un point géométrique de W au-dessus de w. On a vu en 1.1 que si V est le sous-groupe de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(\mathcal{C}_w)$ associé(8) à $i_{w*}^{-1}(U)$ par la théorie du corps de classe en dimension 1, et si on pose $G := \pi_1^{\mathrm{ab}}(\mathcal{C}_w)/V$, alors on a pour tout $x \in |\mathcal{C}_w|$

$$N_x \leq \sharp H^1(\mathcal{C}_w, G) \tag{1.5.1}$$

Or par définition, on a une identification

$$C(\mathcal{C}_w)/i_{w*}^{-1}(U) \simeq G \tag{1.5.2}$$

Le membre de gauche de (1.5.2) est annulé par une certaine puissance de ℓ, car c'est un sous-groupe fini de $C(X)/U$. Le groupe G est donc un produit de $\mathbb{Z}/\ell^{n_i}$ pour $n_1 \leq \cdots \leq n_k$. Comme on a pas de contrôle a priori sur le nombre de facteurs intervenant dans G, il faut raffiner l'inégalité (1.5.1) en exploitant le fait que pour un ℓ-groupe fini G, la torsion(9) $\operatorname{tor}(G)$ est en général bien inférieure à son ordre. On a en fait

$$N_x \leq \operatorname{tor}(H^1(\mathcal{C}_w, G))$$

Or on a une inclusion canonique $\mathbb{Z}/\ell^{n_i} \hookrightarrow \mathbb{Z}/\ell^{n_k}$ qui induit une injection

$$H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^{n_i}) \hookrightarrow H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^{n_k})$$

dont on déduit $\operatorname{tor}(H^1(\mathcal{C}_w, G)) \leq \operatorname{tor}(H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^{n_k}))$. D'où

$$N_x \leq \sharp H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^{n_k})$$

On en déduit

$$N_x \leq \sharp H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \tag{1.5.3}$$

Le membre de droite de (1.5.3) est fini par 2.2.2.

1.6. Comparaison des $\sharp H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^n)$.— Pour borner la taille de $H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$, on est naturellement amené à s'intéresser au faisceau $R^1 p_* \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$. On utilisera librement le

Lemme 1.6.1. — *Pour tout entier m inversible sur W, le faisceau $R^1 p_* \mathbb{Z}/m$ est un système local sur W, et le morphisme de changement de base*

$$(R^1 p_* \mathbb{Z}/m)_{\overline{w}} \longrightarrow H^1(\mathcal{C}_{\overline{w}}, \mathbb{Z}/m)$$

est un isomorphisme.

(8) C_w n'est pas une courbe arithmétique mais une courbe sur un corps fini. Il y a donc un argument supplémentaire pour justifier l'existence de V. Voir [**Rio12**, p43].

(9) C'est-à-dire le plus petit des entiers n tel que $g^n = e_G$ pour tout $g \in G$.

D'après ce lemme, pour n fixé, le faisceau $Rp_*\mathbb{Z}/\ell^n$ est trivialisable par un revêtement étale galoisien $W' \longrightarrow W$. D'après la discussion de 2.1, le faisceau $Rp_*\mathbb{Z}/\ell^n$ est équivalent à la donnée d'un groupe E_n muni d'une action de $\mathrm{Gal}(W'/W)$. On a

$$H^1(\mathcal{C}_{\overline{w}}, \mathbb{Z}/\ell^n) \simeq (Rp_*\mathbb{Z}/\ell^n)_{\overline{w}} \simeq E_n$$

et à travers ces identifications, l'action de $\mathrm{Gal}(\kappa(\overline{w})/\kappa(w))$ sur $H^1(\mathcal{C}_{\overline{w}}, \mathbb{Z}/\ell^n)$ se fait sur E_n via la chaîne de morphismes

$$\mathrm{Gal}(\kappa(\overline{w})/\kappa(w)) \longrightarrow \pi_1(W, \overline{w}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(W'/W) \longrightarrow 0$$

Notons D_w le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(W'/W)$ engendré par l'image de Frob_w. Il vient[10]

$$H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^n) \simeq E_n^{D_w}$$

En fait, comme le foncteur défini sur la catégorie des groupes abéliens par $G \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}(\pi_1^{\mathrm{ab}}(X), G) = H^1(X, G)$ est exact à gauche, on en déduit que pour $i \leq n$, le groupe E_i est un sous $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$-espace de E_n. On a donc plus précisément

$$H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^i) \simeq E_i^{D_w} \qquad i = 1, \ldots, n$$

En particulier si $w_0, w \in |W|$ sont tels que $D_{w_0} \subset D_w$ à conjugaison près, on a

$$\sharp H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^i) \leq \sharp H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Z}/\ell^i) \qquad i = 1, \ldots, n$$

Si on prend pour w_0 un point de Bloch comme en 2.4.2, il vient en particulier que pour tout $w \in |W|$ tel que $D_{w_0} \subset D_w$ à conjugaison près, on a

$$\sharp H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^i) = \sharp H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Z}/\ell^i) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.6.2}$$

A partir de là, on est a priori coincé car on aura beau raffiner le revêtement W' pour trivialiser toujours plus de $Rp_*\mathbb{Z}/\ell^n$, l'égalité (1.6.2) ne sera valable que pour un nombre fini de coefficients.

L'idée totalement diabolique de Kerz est d'exploiter l'exactitude à gauche (donc la commutation au noyau) de $G \longrightarrow H^1(X, G)$ pour remarquer que $H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^i)$ est le groupe de ℓ^i-torsion de $H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$. Or un groupe ℓ-primaire est de ℓ^n-torsion dès que ses groupes de ℓ^{n+1}-torsion et de ℓ^n-torsion coïncident! Si dans (1.6.2) on prend donc pour n l'entier $n_0 + 1$ ou n_0 est un entier à partir duquel la suite $i \longrightarrow \sharp H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Z}/\ell^i)$ stationne, alors (1.6.2) force l'égalité

$$H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^{n_0}) = H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^{n_0+1})$$

autrement dit, dans $H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$, la ℓ^{n_0+1}-torsion et de ℓ^{n_0}-torsion coïncident. Donc $H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ est de ℓ^{n_0}-torsion. Il s'agit donc de $H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^{n_0})$, et on en déduit

$$\sharp H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) = \sharp H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \tag{1.6.3}$$

---

[10] On voit bien là l'intérêt de la locale constance de $Rp_*\mathbb{Z}/\ell^n$: elle permet de voir tous les $H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^n)$ dans un espace commun, et donc de les comparer.

1.7. Borne sur N_x. — Notons $X' := W' \times_W X$. D'après 2.3.1, c'est un revêtement galoisien de groupe $\mathrm{Gal}(W'/W)$. Notons d son degré. On pose $x_0 = s(w_0)$. Alors si $x \in |X|$ est tel que D_x est conjugé à D_{x_0}, on a que $D_{p(x)} \subset D_{w_0}$ à conjugaison près, d'où par 1.5.3 et (1.6.3)

$$N_x \leq \sharp H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) = \sharp H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$$

Autrement dit, par théorème de Chebotarev [**Ser63**], la fonction $x \longrightarrow N_x$ est bornée par $B := \sharp H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ sur un sous-ensemble de densité $\geq 1/d$.

Si on savait qu'à U correspond un revêtement galoisien de groupe G, alors on déduirait de ce qui précède que l'ensemble

$$A_X := \{x \in |X| / N_x \leq B\} = \{x \in |X| / \operatorname{Frob}_x \in G[B]\}$$

a une densité et que du fait de l'inclusion

$$A'_X := \{x \in |X| / D_x \text{ conjugué à } D_{x_0}\} \subset A_X$$

cette densité est au moins $1/d$. En appliquant de nouveau Chebotarev (mais cette fois au revêtement associé à U!), on obtient que d borne l'ordre de $G/G[B]$. On est donc naturellement amené à chercher à borner la fonction $x \longrightarrow N_x$ par Bd.

Comme d'habitude, on peut tenter de se ramener au cas d'une courbe arithmétique régulière. Le problème qui se pose alors est que $A'_{\mathcal{C}}$ ne fait plus sens a priori car le changement de base $\mathcal{C}' := \mathcal{C} \times_C X'$ n'est pas nécessairement galoisien. Néanmoins, une courbe $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C}'/\mathcal{C}$ est galoisien existe par lemme d'approximation de Bloch [**Ker11**, 2.2].

Fixons une telle courbe $i : \mathcal{C} \longrightarrow X$ passant par x et x_0. Par théorie du corps de classe en dimension 1, le sous-groupe $i_*^{-1}(U)$ correspond à un sous-groupe ouvert V de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(\mathcal{C})$. On note G le groupe de Galois du revêtement associé. De nouveau, $A_{\mathcal{C}}$ a une densité.

Soit $y \in \mathcal{C}$. Par commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(y, \overline{y}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Gal}(\mathcal{C}'/\mathcal{C}) \arrow[d, hook] \\
& \mathrm{Gal}(X'/X)
\end{tikzcd}$$

si y est tel que $D_y^{\mathcal{C}'} = D_{x_0}^{\mathcal{C}'}$ à conjugaison près, alors on a $D_{i(y)} = D_{x_0}$ à conjugaison près, et donc $N_y = N_{i(y)} \leq B$. On en déduit l'inclusion

$$\{y \in |\mathcal{C}| / D_y^{\mathcal{C}'} \text{ conjugué à } D_{x_0}^{\mathcal{C}'}\} \subset A_{\mathcal{C}'}$$

de sorte que $A_{\mathcal{C}'}$ est de densité $\geq 1/d$, et donc $G/G[B]$ est d'ordre $\leq d$. On en déduit que l'image de Frob_x dans G est d'ordre $\leq Bd$. Donc $N_x \leq Bd$.

2. Sorites

2.1. Action de Galois sur la fibre d'un faisceau localement constant. — Soit X un schéma connexe localement noethérien et soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible lisse sur $X_{\text{ét}}$. En particulier, si on fixe $x \in X$ et $\overline{x}$ un point géométrique de X au-dessus de x, le faisceau $\mathcal{F}$ est équivalent à la donnée d'une action continue de $\pi_1(X, \overline{x})$ sur un groupe E.

Pour le voir, on dispose par définition d'un revêtement étale fini $X' \longrightarrow X$ trivialisant $\mathcal{F}$. On pose $E = \mathcal{F}(X')$. Il s'agit d'un $\mathrm{Gal}(X'/X)$-ensemble. L'action de $\pi_1(X, \overline{x})$ sur E se fait via la surjection canonique

$$\pi_1(X, \overline{x}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(X'/X) \longrightarrow 0$$

En particulier, l'action de $\mathrm{Gal}(\kappa(\overline{x})/\kappa(x))$ sur $\mathcal{F}_{\overline{x}} \simeq E$ se fait à travers la chaine de morphismes

$$\mathrm{Gal}(\kappa(\overline{x})/\kappa(x)) \longrightarrow \pi_1(X, \overline{x}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(X'/X) \longrightarrow 0$$

2.2. Un lemme de finitude. —

Lemme 2.2.1. — *Soit $\mathcal{C}$ une courbe lisse sur une corps fini k de caractéristique $p \neq \ell$. Alors le groupe $H^1(\mathcal{C}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ est fini.*

Démonstration. — On se donne une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. On a une identification

$$H^1(\mathcal{C}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \simeq H^1(\mathcal{C}_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$$

Or à travers l'identification

$$H^1(\mathcal{C}_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}(\pi_1^{\mathrm{ab}}(\mathcal{C}_{\overline{k}}), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$$

l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ ne peut être donnée[(11)] que par la précomposition par l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $\pi_1^{\mathrm{ab}}(\mathcal{C}_{\overline{k}})$ héritée[(12)] de la suite exacte fondamentale [**Gro71**, IX 6.1]

$$0 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{C}_{\overline{k}}, \overline{w}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{C}, w) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow 0$$

On a donc

$$H^1(\mathcal{C}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}(\pi_1^{\mathrm{ab}}(\mathcal{C}_{\overline{k}})_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$$

La théorie de Kümmer fournit d'autre part une identification

$$\pi_1^{\mathrm{ab}}(\mathcal{C}_{\overline{k}}) \simeq (\varprojlim_{p \nmid n} J(\overline{k})[n]) \times (\text{un pro-}p\text{ groupe})$$

où J désigne la jacobienne généralisée de $\mathcal{C}_{\overline{k}}$. Puisque $p \neq \ell$, on a donc

$$H^1(\mathcal{C}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}((\varprojlim_{p \nmid n} J(\overline{k})[n])_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \tag{2.2.2}$$

Or, la preuve du théorème de Katz-Lang [**KL81**] met en évidence que le groupe $(\varprojlim_{p \nmid n} J(\overline{k})[n])_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$ est fini. On peut donc trouver un N assez grand pour lequel tout morphisme $(\varprojlim_{p \nmid n} J(\overline{k})[n])_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)} \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ tombe systématiquement dans l'unique copie de $\mathbb{Z}/\ell^N$ présente dans $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$. D'où le lemme 2.2.1. □

(11) Ca serait quand même à vérifier...

(12) Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, on choisit un relèvement $s \in \pi_1(\mathcal{C}, w)$, et la restriction à $\pi_1(\mathcal{C}_{\overline{k}}, \overline{w})$ conjugaison par s induit une action de σ sur $\pi_1^{\mathrm{ab}}(\mathcal{C}_{\overline{k}})$ indépendante du choix de s.

2.3. Changement de base par un revêtement galoisien. — Soit $p : X \longrightarrow W$ un morphisme lisse de type fini entre schémas localement noethériens avec W normal intègre. On suppose que la fibre générique géométrique de X est irréductible, et on se donne un revêtement galoisien $W' \longrightarrow W$. On note $X' := W' \times_W X$.

Lemme 2.3.1. — *X' est un revêtement galoisien de X de groupe* $\mathrm{Gal}(W'/W)$.

Démonstration. — Soit $\eta_{W'} \longrightarrow \eta_W$ le morphisme étale fini induit par $W' \longrightarrow W$, et soit $\overline{\eta}$ un point géométrique de W' localisé en $\eta_{W'}$. Alors $(X'_{\eta_{W'}})_{\overline{\eta}} = X_{\overline{\eta}}$ est connexe. En particulier, $X'_{\eta_{W'}}$ est connexe. Donc si U est un ouvert non-vide de X', le fait que p soit ouvert assure que $p(U)$ contient $\eta_{W'}$, d'où on déduit que $U \cap X'_{\eta_{W'}}$ est un ouvert non vide de $X'_{\eta_{W'}}$ donc contient le point générique de $X'_{\eta_{W'}}$. Ainsi, deux ouverts non vides de X' ont toujours un point commun. Donc X' est connexe. Ainsi, $X' \longrightarrow X$ est un revêtement galoisien.

La suite exacte fondamentale [**Gro71**, IX 6.1] donne d'autre part la surjectivité de la flèche supérieure de

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_{\eta_W}, \overline{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\eta_W, \overline{\eta}_W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X, \overline{x}) & \longrightarrow & \pi_1(W, \overline{\eta}_W) \end{array} \tag{2.3.2}$$

Or par normalité de W, la flèche verticale droite de (2.3.2) est aussi surjective. On en déduit que $\pi_1(X, \overline{x}) \longrightarrow \pi_1(W, \overline{\eta}_W)$ est surjective. Donc le morphisme canonique $\mathrm{Gal}(X'/X) \longrightarrow \mathrm{Gal}(W'/W)$ est surjectif. Comme ces groupes ont même cardinal (le degré des revêtements X'/X et W'/W, qui sont les mêmes), on obtient la seconde partie de 2.3.1. □

2.4. Point de Bloch. —

2.4.1. Sorites. — Soit X un schéma localement noethérien et soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible lisse en $\mathbb{Z}/\ell^n$-modules sur X, où ℓ inversible sur X. On sait que $\mathcal{F}$ est équivalent à la donnée d'un $\mathbb{Z}/\ell^n$-module de type fini E muni d'une action continue du $\pi_1(X, \overline{x})$. Le morphisme de restriction canonique

$$H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{x}}$$

correspond dans le langage galoisien à

$$E^{\pi_1(X,\overline{x})} \hookrightarrow E$$

En particulier, on a une injection

$$H^0(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\overline{x}}^{G_{\kappa(x)}}$$

Or

$$\varinjlim_{C(x)} H^0(U, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}_{\overline{x}}^{G_{\kappa(x)}} \tag{2.4.1}$$

où $C(x)$ désigne la catégorie des diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "\text{étale}"] \\ x \arrow[ur] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

avec $\kappa(x) = \kappa(u)$ et où u désigne l'image de x dans U.

Puisque le membre de droite de (2.4.1) est fini, on peut se donner $U_0 \longrightarrow X$ tel qu'on ait

$$H^0(U_0, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\overline{x}}^{G_{\kappa(x)}} = \mathcal{F}_{\overline{u_0}}^{G_{\kappa(u_0)}} \tag{2.4.2}$$

Pour $(u_0', U_0') \in C(u_0)$ étale, la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} H^0(U_0, \mathcal{F}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}_{\overline{u_0}}^{G_{\kappa(u_0)}} \arrow[d, "\wr"] \\ H^0(U_0', \mathcal{F}) \arrow[r, hook] & \mathcal{F}_{\overline{u_0'}}^{G_{\kappa(u_0')}} \end{tikzcd}$$

assure aussi que l'identification (2.4.2) reste valable après raffinement de la situation par un objet de $C(u_0)$.

2.4.2. Cas de la fibration $p : X \longrightarrow W$. — On fixe en entier n et un point $w_0 \in |W|$. Puisque $R^1p_*\mathbb{Z}/\ell^n$ est localement constant, on peut toujours quitte à procéder à un changement de base étale[(13)] $W' \longrightarrow W$ (dépendant à la fois de n et w_0) supposer que le morphisme de restriction

$$H^0(W, R^1p_*\mathbb{Z}/\ell^n) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Z}/\ell^n) \tag{2.4.3}$$

est un isomorphisme. Puisqu'il s'agit par ailleurs d'une injection pour tous les points de W, on en déduit que pour tout $w \in |W|$, on a

$$\sharp H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Z}/\ell^n) \leq \sharp H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^n)$$

On peut néanmoins faire beaucoup mieux. Quitte à construire de proche en proche un changement de base étale de W qui permet de réaliser (2.4.3) pour les coefficients $\mathbb{Z}/\ell^1, \ldots, \mathbb{Z}/\ell^n$, on peut supposer qu'on a en fait

$$\sharp H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Z}/\ell^i) \leq \sharp H^1(\mathcal{C}_w, \mathbb{Z}/\ell^i) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.4.4}$$

Si on choisit pour n un entier à partir duquel la suite $i \longrightarrow \sharp H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Z}/\ell^i)$ stationne (un tel entier existe d'après 2.2.1), on a pour tout $i \geq n$

$$\sharp H^0(W, R^1p_*\mathbb{Z}/\ell^n) \leq \sharp H^0(W, R^1p_*\mathbb{Z}/\ell^i) \leq \sharp H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Z}/\ell^i) = \sharp H^1(\mathcal{C}_{w_0}, \mathbb{Z}/\ell^n)$$

donc finalement, l'identification (2.4.3) vaut pour tous les coefficients $\mathbb{Z}/\ell^i$ et alors l'inégalité (2.4.4) vaut en fait pour tout i entier. On dira que w_0 est un *point de Bloch*.

[(13)] Innocent pour la preuve du théorème de finitude, en vertu de 1.3.

Références

[GD67] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique IV*, vol. 32, Publications Mathématiques de l'IHES, 1967.

[Gro71] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 263, Springer-Verlag, 1971.

[Gro72] ———, *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas. Tome 2*, Springer-Verlag, 1972.

[Gro73] ———, *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas. Tome 3*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 305, Springer-Verlag, 1973.

[Ker11] M. Kerz, *Higher class field theory and the connected component*, Manuscripta Math. **135** (2011).

[KL81] N. Katz and S. Lang, *Finiteness theorems in geometric class field theory*, L'Enseignement Math. **27** (1981).

[Rio12] J. Riou, *Introduction à la théorie du corps de classe en dimension supérieure*, Notes de Cours. Orsay, Juin 2012.

[Ser63] J.-P. Serre, *Zeta and L-functions*, Proc. Conf. Purdue Univ., 1963.

J.-B. Teyssier, Freie Universität Berlin, Mathematisches Institut, Arnimallee 3, 14195 Berlin, Germany • *E-mail :* `teyssier@zedat.fu-berlin.de`