LE THÉORÈME DE KATZ-LANG

par

Jean-Baptiste Teyssier

Ce texte est la version détaillée d'un exposé que j'ai donné dans le cadre du séminaire "Théorie du corps de classe en dimension supérieure et ramification" organisé par Hélène Esnault. La référence principale(1) est [**KL81**].

1. Généralités sur les groupes

1.1. Abélianisation et suite exacte. — Soit G un groupe. On note G^{ab} le quotient de G par le sous-groupe de G engendré par les commutateurs de G. Le foncteur $G \to G^{\mathrm{ab}}$ est exact à droite mais pas exact à gauche. Néanmoins on a le résultat très utile

Lemme 1.1.1. — *Si*

$$G_1 \xrightarrow{\psi} G_2 \xrightarrow{\phi} G_3 \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de groupes, alors la suite

$$G_1^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\psi} G_2^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\phi} G_3^{\mathrm{ab}} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. — Soit $g \in G_2$ tel que

$$\phi(g) = [h_1, k_1] \cdots [h_n, k_n] = (h_1 k_1 h_1^{-1} k_1^{-1}) \cdots (h_n k_n h_n^{-1} k_n^{-1})$$

Par surjectivité de ϕ, ceci peut s'écrire

$$\begin{aligned} \phi(g) &= (\phi(\lambda_1)\phi(\mu_1)\phi(\lambda_1)^{-1}\phi(\mu_1)^{-1}) \cdots (\phi(\lambda_n)\phi(\mu_n)\phi(\lambda_n)^{-1}\phi(\mu_n)^{-1}) \\ &= \phi([\lambda_1\mu_1\lambda_1^{-1}\mu_1^{-1}] \cdots [\lambda_n\mu_n\lambda_n^{-1}\mu_n^{-1}]) \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

On en déduit

$$g = [\lambda_1\mu_1\lambda_1^{-1}\mu_1^{-1}] \cdots [\lambda_n\mu_n\lambda_n^{-1}\mu_n^{-1}]h \tag{1.1.3}$$

(1) A laquelle on renvoie pour les énoncés précis et les notations utilisées ici.

avec $h \in \operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Im}\psi$. Donc dans G_2^{ab}, l'égalité 1.1.3 donne $[g] = [h] \in \operatorname{Im}\psi$. $\square$

1.2. Abélianisation et coinvariants. — Soit

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

une suite exacte de groupes. Si $k \in K$, on choisit un relèvement $\widetilde{k} \in G$. Alors $\widetilde{k}$ agit sur G et H par conjugaison. Cette action dépend du choix du relèvement $\widetilde{k}$ de k. L'action induite sur G^{ab} est triviale, mais l'action induite sur H^{ab} ne l'est pas nécessairement et ne dépend pas du choix de relèvement fait. Si $(H^{\mathrm{ab}})_K$ désigne le quotient de H^{ab} par le sous-groupe H_K engendré par les éléments de la forme $[h](a \cdot [h])^{-1} = [hah^{-1}a^{-1}]$, avec $h \in H$ et $a \in K$, on en déduit par 1.1.1 une surjection $(H^{\mathrm{ab}})_K \twoheadrightarrow \operatorname{Ker}(G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow K^{\mathrm{ab}})$. On va montrer que si la suite exacte est scindée, alors il s'agit d'un isomorphisme. C'est l'objet du

Lemme 1.2.1. — *Soit*

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

une suite exacte scindée de groupes[(2)]. *Alors, la suite*

$$0 \longrightarrow (H^{\mathrm{ab}})_K \longrightarrow G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow K^{\mathrm{ab}} \longrightarrow 0$$

est exacte. En particulier, on a $G^{\mathrm{ab}} \simeq (H^{\mathrm{ab}})_K \times K^{\mathrm{ab}}$.

Démonstration. — Il faut montrer que le noyau de $H^{\mathrm{ab}} \longrightarrow G^{\mathrm{ab}}$ est exactement H_K. Soit donc $g \in H$ avec $g = aba^{-1}b^{-1}$, où $a, b \in G$. Il faut grosso modo montrer que l'on peut toujours remplacer a par un élément de H. On commence par observer que H_K est stable par l'action de K : si $f : K \longrightarrow \operatorname{Aut} H$ désigne l'action de conjugaison, on a en effet

$$f(b) \cdot (m(f(a) \cdot m)^{-1}) = (f(b) \cdot m)(f(ba) \cdot m)^{-1} = (f(b) \cdot m) f(bab^{-1}) \cdot (f(b) \cdot m)^{-1}$$

Ecrivons $a = hk$ avec $h \in H$ et $k \in K$. Pour montrer que g est dans H_K, il suffit de montrer que $k^{-1}gk$ est dans H_K. Or on a

$$\begin{aligned} k^{-1}gk &= k^{-1}(hkbk^{-1}h^{-1}b^{-1})k \\ &= (k^{-1}hk)b(k^{-1}hk)^{-1}(k^{-1}b^{-1}k) \\ &= (HbH^{-1}b^{-1})(bk^{-1}b^{-1}k) \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

On a $HbH^{-1}b^{-1} \in H$ et $[HbH^{-1}b^{-1}] \in H_K$, donc $bk^{-1}b^{-1}k \in H$ et il suffit de montrer que $[bk^{-1}b^{-1}k] \in H_K$. On écrit de nouveau $b = h'k'$, et en répétant le processus précédent, on obtient que $k^{-1}k'^{-1}kk' \in H$ et qu'il suffit de montrer que $[k^{-1}k'^{-1}kk'] \in H_K$. Mais $k^{-1}k'^{-1}kk' \in H \cap K = \{1\}$, donc c'est immédiat. $\square$

(2) Autrement dit, G est produit semi-direct de H et K, que l'on peut voir comme sous-groupes de G avec K agissant sur H par conjugaison.

1.3. Sous-groupes fermés d'un groupe profini. — Soit G un groupe profini et H un sous-groupe fermé (donc compact !) de G. Alors H est aussi de Hausdorff et complètement discontinu. C'est donc un groupe profini, pouvant ainsi être vu comme la limite projective d'un système fondamental de voisinages de l'unité constitué de sous-groupe normaux ouverts. Pour un tel système, on peut toujours prendre les $N \cap H$, N normal ouvert dans G. Donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ H/(N \cap H) \arrow[r, hook, "i_N"'] & G/N \end{tikzcd}$$

induit par limite projective le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook] \arrow[d, "\wr"'] & G \arrow[d, "\wr"] \\ \varprojlim (H/(N \cap H)) \arrow[r, hook] & \varprojlim G/N \end{tikzcd}$$

Notons H_N l'image de $H/(N \cap H)$ par i_N, et $p_N : G \longrightarrow G/N$ la surjection canonique. Alors

$$H = \bigcap_N p_N^{-1}(H_N)$$

Autrement dit, H *est l'intersection des sous-groupes normaux ouverts de* G *qui le contiennent.*

2. Quelques lemmes sur le π_1

2.1. $\mathrm{Ker}(X/K)$ **et coinvariants.** — On prend ici $S = \operatorname{Spec} K$. La suite exacte fondamentale [**Gro71**, IX 6.1][(3)]

$$0 \longrightarrow \pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x}) \longrightarrow \pi_1(X, x) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \longrightarrow 0$$

induit par 1.1.1 une suite exacte

$$\pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x})^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \pi_1(X, x)^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)^{\mathrm{ab}} \longrightarrow 0$$

On a donc par 1.2 une surjection

$$(\pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x})^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)} \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(X/K)$$

---

(3) Il est plus correct d'écrire $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ que $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ car $\overline{K}/K$ admet des sous-extensions inséparables. On peut néanmoins poser

$$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) := \varprojlim_{K \subset L \subset \overline{K}} \mathrm{Aut}(L/K)$$

Puisqu'une extension finie L sur K purement inséparable s'obtient par adjonction de racines p^n-ième, $\mathrm{Aut}(L/K)$ est réduit à l'identité, donc le morphisme d'oubli des extensions non séparables $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ est un isomorphisme.

qui est un isomorphisme si X admet un point rationnel. De là, on en déduit facilement que l'énoncé de Katz-Lang est prouvé s'il l'est après une extension galoisienne finie de K.

2.2. Réduction au cas où S est un point. — Le seul point délicat du lemme 2 est l'exactitude de

$$\pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x}) \xrightarrow{\alpha} \pi_1(X, x) \xrightarrow{\beta} \pi_1(S, s) \longrightarrow 0$$

(1) La connexité de X est nécessaire pour parler de $\pi_1(X, x)$ et de même pour $X_{\overline{\eta}}$. La normalité de X va permettre d'obtenir $\beta \circ \alpha = 0$. Celle-ci découle immédiatement des propriétés de permanence habituelles pour un morphisme lisse [**Gro71**, II 3.1]. Quant à la connexité, on sait par hypothèse que f est plat de type fini de but localement noethérien, donc suivant [**Gro71**, IV 6.6], f est ouvert. Si U est un ouvert non vide de X, $f(U)$ contient donc η et alors U rencontre X_η, et donc contient le point générique de X_η[(4)]. Par conséquent, deux ouverts non vides de X se rencontrent toujours, d'où la connexité de X.

(2) Les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X_{\overline{\eta}} \arrow[r] \arrow[dr] & X_\eta \arrow[r] \arrow[d] & \eta \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

donnent des morphismes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1(X_\eta, x) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\eta, \overline{\eta}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & \pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x}) \arrow[r, "\alpha"] & \pi_1(X, x) \arrow[r, "\beta"] & \pi_1(S, s) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

La ligne supérieure est la suite exacte fondamentale [**Gro71**, IX 6.1]. On en déduit immédiatement que $\beta \circ \alpha = 0$. D'autre part, $\pi_1(\eta, \overline{\eta}) \longrightarrow \pi_1(S, s)$ est une surjection du fait de la description du π_1 pour les schémas connexes normaux [**Gro71**, I 10.2]. On en déduit que β est une surjection.

Montrons que $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$. D'après 1.3, il suffit de démontrer que si U est un sous-groupe normal ouvert de $\pi_1(X, x)$ contenant $\operatorname{Im} \alpha$, alors U contient $\operatorname{Ker} \beta$. Notons $Y \in \mathrm{Et}_X$ le revêtement étale de X associé à U. C'est un objet ponctué connexe de Et_X. D'après [**Gro71**, V 6.4] et [**Gro71**, V 6.7], on doit montrer que si $Y_{\overline{\eta}} \in \mathrm{Et}_{X_{\overline{\eta}}}$ a une section[(5)], alors Y provient d'un revêtement étale de S.

Considérons $Y_\eta \in \mathrm{Et}_{X_\eta}$. Puisque $Y \longrightarrow X$ est ouvert fini, c'est un morphisme surjectif, donc $Y \longrightarrow X \longrightarrow S$ est surjectif. C'est aussi un morphisme ouvert, d'où on déduit que le point générique de Y est envoyé sur η. Donc Y_η admet un point dense, et ainsi, Y_η est connexe. Or par hypothèse, $Y_{\overline{\eta}}$ admet une section, donc par

(4) Qui existe car par changement de base, X_η est lisse sur η et connexe puisque $X_{\overline{\eta}}$ l'est.

(5) C'est au sens galoisien qu'il faut comprendre ceci, mais l'objet final de $\mathrm{Et}_{X_{\overline{\eta}}}$ est $X_{\overline{\eta}}$ lui-même. Il s'agit donc d'une section de $Y_{\overline{\eta}} \longrightarrow X_{\overline{\eta}}$ au sens habituel.

exactitude de la ligne supérieure de 2.2.1, Y_η provient d'un revêtement étale de η ie $Y_\eta \simeq X_\eta \times_\eta \operatorname{Spec} L$ avec L/K extension séparable. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& X_\eta \times_\eta \operatorname{Spec} L \arrow[dr] & \\
X_{\overline{\eta}} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d] & & X_\eta \arrow[d] \\
\overline{\eta} \arrow[rr] & & \eta
\end{tikzcd}$$

induit

$$\begin{tikzcd}
& K(X_\eta \times_\eta \operatorname{Spec} L) \arrow[dl] & \\
K(X_\eta \times_\eta \operatorname{Spec} \overline{K}) & & X_\eta \arrow[ll] \arrow[ul] \\
\overline{K} \arrow[u] & & K \arrow[ll] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Si A est l'anneau des fonctions d'un ouvert non vide de X_η, alors

$$K(X_\eta \times_\eta \operatorname{Spec} \overline{K}) = \operatorname{Frac}(A \otimes_K \overline{K}) = \operatorname{Frac} A \otimes_K \overline{K} = F \otimes_K \overline{K}$$

et

$$K(X_\eta \times_\eta \operatorname{Spec} L) = F \otimes_K L = (F \otimes_K 1) \cdot (1 \otimes_K L)$$

Dans cette dernière égalité, le $\cdot$ signifie la multiplication dans le corps de fonction de $X_{\overline{\eta}}$. On en déduit que Y_η est la normalisation de X dans $F \cdot L$ vu comme sous-corps de $K(X_{\overline{\eta}})$.

Ceci étant observé, il y a un candidat naturel pour le revêtement de S : notons S' la normalisation de S dans L. Alors, en appliquant le point 1) à la flèche verticale gauche de

$$\begin{tikzcd}
X \times_S S' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
S' \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

on obtient que $X \times_S S'$ est normal connexe. Or la flèche supérieure est finie, d'où on déduit[(6)] que $X \times_S S'$ est la normalisation de X dans le corps de fonction de $X \times_S S'$. Or ce corps est $F \cdot L$! Donc $Y \simeq X \times_S S'$. Il reste donc à prouver que S' est étale sur S. Puisque $X \longrightarrow S$ est lisse surjectif et de type fini, c'est un morphisme *fpqc*[(7)].

[(6)] C'est une conséquence du théorème principal de Zariski [**GD61**, 4.4.9].

[(7)] On utilise une nouvelle fois la surjectivité de $X \longrightarrow S$. Le fait que ce morphisme soit de type fini et pas seulement localement de type fini est crucial aussi.

Donc par descente *fpqc*, S'/S étale provient de ce que le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & S' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

est cartésien et Y est étale sur X.

(3) D'après 1.1.1, on peut passer le diagramme (2.2.1) à l'abélianisé tout en conservant l'exactitude de la seconde ligne. Une chasse au diagramme immédiate montre alors que le morphisme canonique

$$\mathrm{Ker}(X_\eta/\eta) \longrightarrow \mathrm{Ker}(X/S)$$

est surjectif.

3. La preuve

Dans la suite, on supposera que K est de caractéristique p, le cas de caractéristique 0 se traitant de façon quasi similaire.

3.1. Dévissage. — On commence par utiliser les fibrations élémentaires d'Artin pour se ramener au cas d'une courbe lisse géométriquement connexe sur un corps. Si C en est une compactification lisse, on peut toujours supposer que $D = X\backslash C$ est composé de points rationnels. On doit alors démontrer que $(\pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x})^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)}$ est fini.

La théorie de Kummer fournit un isomorphisme

$$\pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x})^{\mathrm{ab}} \simeq (\varprojlim_{p\nmid n} J_D(\overline{K})[n]) \times (\text{un pro-}p\text{ group})$$

où J_D désigne la jacobienne généralisée de $\overline{X}$ pour le modulus D[8]. Notons $T_{\neq p}J_D(\overline{K})$ pour $\varprojlim_{p\nmid n} J_D(\overline{K})[n]$. Le foncteur « oubli de trivialisation à l'infini » induit une suite exacte de groupes algébriques

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m^{\sharp D-1} \longrightarrow J_D \longrightarrow J \longrightarrow 0$$

Prenons-en les $\overline{K}$-points. On obtient une suite exacte de groupes

$$0 \longrightarrow \overline{K}^{\times\sharp D-1} \longrightarrow J_D(\overline{K}) \longrightarrow J(\overline{K}) \longrightarrow 0$$

Soit ℓ un nombre premier distinct de p et $n \in \mathbb{N}^\times$. Par application du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\mathbb{Z}/\ell^n, \ )$, on obtient une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow U_{\ell^n}(\overline{K})^{\times\sharp D-1} \longrightarrow J_D(\overline{K})[\ell^n] \longrightarrow J(\overline{K})[\ell^n] \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/\ell^n, \overline{K}^\times)^{\sharp D-1} \cdots$$

---

[8] Il y aurait ici beaucoup de travail pour s'assurer que l'interprétation jacobienne fournit un isomorphisme de modules galoisiens et pas seulement un isomorphisme de groupes.

En appliquant $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\ \ ,\overline{K}^{\times})$ à la résolution projective $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ell^n} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ de $\mathbb{Z}/\ell^n$, on obtient une identification

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/\ell^n, \overline{K}^{\times}) \simeq \mathrm{Coker}(\overline{K}^{\times} \xrightarrow{(\ )^{\ell^n}} \overline{K}^{\times}) \simeq 0$$

On en déduit un système projectif de suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow U_{\ell^n}(\overline{K})^{\times \sharp D-1} \longrightarrow J_D(\overline{K})[\ell^n] \longrightarrow J(\overline{K})[\ell^n] \longrightarrow 0$$

Le système projectif $(U_{\ell^n}(\overline{K}))_{n\in\mathbb{N}^\times}$ vérifiant la condition de Mittag-Leffler, on en déduit par limite projective une suite exacte courte de groupes. En considérant le produit de ces suites sur tous les $\ell \neq p$, on obtient une suite exacte courte de groupes

$$0 \longrightarrow T_{\neq p}\mathbb{G}_m(\overline{K}) \longrightarrow T_{\neq p}J_D(\overline{K}) \longrightarrow T_{\neq p}J(\overline{K}) \longrightarrow 0$$

D'où par prise des coinvariants une suite

$$(T_{\neq p}\mathbb{G}_m(\overline{K}))_{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)} \longrightarrow (T_{\neq p}(J_D(\overline{K}))_{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)} \longrightarrow (T_{\neq p}J(\overline{K}))_{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)} \longrightarrow 0$$

exacte au niveau des 2ème et 3ème termes. On est donc ramené à démontrer la finitude des groupes

$$(T_{\neq p}\mathbb{G}_m(\overline{K}))_{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)} \quad \text{et} \quad (T_{\neq p}J(\overline{K}))_{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)}$$

3.2. Réduction au cas d'un corps fini. — Dans toute la suite, on se donne une variété abélienne A sur un corps K de caractéristique p et de type fini sur $\mathbb{F}_p$. On va se concentrer sur la finitude du module $(T_{\neq p}A(\overline{K}))_{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)}$, le cas de $(T_{\neq p}\mathbb{G}_m(\overline{K}))_{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)}$ étant plus facile.

On doit montrer qu'en dehors d'un nombre fini de nombres premiers $\ell_1, \dots, \ell_n$ distincts de p, le module $(T_\ell A(\overline{K}))_{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)}$ est nul, et que pour $k = 1, \dots, n$, le module $(T_{\ell_k} A(\overline{K}))_{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)}$ est fini.

L'idée de Katz et Lang est de se ramener au cas où K est un corps fini en utilisant l'interprétation du module galoisien $A(\overline{K})[\ell^n]$ en terme de la fibre d'un revêtement étale sur A.

Plongeons A dans un espace projectif et notons R la $\mathbb{Z}$-algèbre de A engendrée par les coefficients des équations définissant A et les coefficients de la loi de groupe sur A. On en déduit un morphisme propre $\mathbf{A} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, R$ de tiré en arrière à $\mathrm{Spec}\, K$ s'identifiant à A. Rajoutons à R les éléments(9) d'une base de transcendance de K sur son corps premier et notons encore R l'anneau obtenu(10), et K' son corps de fraction. Alors K/K' est une extension algébrique. Notons $\overline{R}$ la clôture entière de R dans K. Il s'agit d'un anneau intègre de corps de fraction K. On a donc un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[d] & A \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,\overline{R} & \mathrm{Spec}\,K \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(9) Ils sont en nombre fini par hypothèse sur K.
(10) C'est encore une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini.

Quitte à se placer au-dessus d'un ouvert(11) de $\operatorname{Spec}\overline{R}$, on peut supposer que le morphisme $\mathbf{A} \longrightarrow \operatorname{Spec}\overline{R}$ est lisse. Il s'agit donc d'un schéma abélien. Notons $\mathbf{A}[\ell^n]$ le noyau de la multiplication par ℓ^n sur $\mathbf{A}$. C'est le schéma rendant cartésien le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}[\ell^n] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{A} \arrow[d, "(\quad)^{\ell^n}"] \\ \operatorname{Spec}\overline{R} \arrow[r, "e"'] & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

Où $e : \operatorname{Spec}\overline{R} \longrightarrow \mathbf{A}$ désigne la section "neutre de $\mathbf{A}$". En particulier, $\mathbf{A}[\ell^n]$ est un revêtement étale de $\operatorname{Spec}\overline{R}$. Notons $\eta = \operatorname{Spec} K$ le point générique de $\operatorname{Spec}\overline{R}$ et $\overline{\eta} \longrightarrow \eta$ le point géométrique au-dessus de η correspondant à $\overline{K}$.

Alors

Lemme 3.2.1. — *Si $x \in \operatorname{Spec}\overline{R}$, et si $\overline{x}$ est un point géométrique au-dessus de x, on a une identification canonique de modules galoisiens*

$$\mathbf{A}[\ell^n]_{\overline{x}} \simeq \mathbf{A}_x(\kappa(\overline{x}))[\ell^n]$$

En appliquant 3.2.1 au point générique η de $\operatorname{Spec}\overline{R}$ ainsi qu'à un point fermé Q, le choix d'un chemin de Q à η fournit une bijection équivariante

(3.2.2)
$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_Q(\kappa(\overline{Q}))[\ell^n] \arrow[r, "\sim"] \arrow[loop below] & A(\overline{K})[\ell^n] \arrow[loop below] \\ \pi_1(\operatorname{Spec}\overline{R}, \overline{Q}) \arrow[r, "\sim"] & \pi_1(\operatorname{Spec}\overline{R}, \overline{\eta}) \\ \operatorname{Gal}(\kappa(\overline{Q})/\kappa(Q)) \arrow[u] & \operatorname{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

On en déduit une surjection de groupes abéliens

$$(T_\ell \mathbf{A}_Q(\kappa(\overline{Q}))_{\operatorname{Gal}(\kappa(\overline{Q})/\kappa(Q))} \twoheadrightarrow (T_\ell \mathbf{A}_Q(\kappa(\overline{Q}))_{\pi_1(\operatorname{Spec}\overline{R}, \overline{Q})}$$

Or on a

$$(T_\ell \mathbf{A}_Q(\kappa(\overline{Q}))_{\pi_1(\operatorname{Spec}\overline{R}, \overline{Q})} \simeq (T_\ell A(\overline{K}))_{\pi_1(\operatorname{Spec}\overline{R}, \overline{\eta})} = (T_\ell A(\overline{K}))_{\operatorname{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)}$$

et on est ramené au cas où K est un corps fini.

(11) Un morphisme de type fini est lisse si et seulement s'il est plat et le faisceau des formes différentielles relatives est localement libre. Par théorème de platitude générique et argument de noethérianité, un tel ouvert existe.

3.3. Cas d'un corps fini. — Soit k un corps fini de caractéristique p, soit q le cardinal de k et soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Notons F l'automorphisme de Frobenius $x \longrightarrow x^q$. Il s'agit d'un générateur topologique de $G_k := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

Soit A une variété abélienne sur k. Alors $T_\ell = T_\ell A(\overline{k})$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de rang $2 \dim A$.

Lemme 3.3.1. — *Le sous-espace E_1 des éléments de $T_\ell A(\overline{k})$ de la forme $x - Fx$ est égal au sous-espace E_2 des éléments de la forme $x - gx$, $g \in G_k$.*

Démonstration. — On a déjà $E_1 \subset E_2$. Puisque l'action de G_k est linéaire, les espaces E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $T_\ell A(\overline{k})$. Ils sont donc en particulier fermés. Pour montrer 3.3.1, il suffit donc de montrer que E_1 est dense dans E_2.

Soit $x \in T_\ell A(\overline{k})$ et $g \in G_k$. Posons $y = x - gx$. On dispose d'une suite d'entiers (n_i) telle que $F^{n_i} \longrightarrow g$ dans G_k. Si on pose

$$y_i = x - F^{n_i} x = \sum_{k=0}^{n_i - 1} (F^k x - F^{k+1} x) \in E_1$$

on a

$$y - y_i = gx - F^{n_i} x \longrightarrow 0$$

□

En particulier, on a

$$|(T_\ell)_{G_k}| = |T_\ell/((1-F)T_\ell)|$$

Cette égalité dit déjà que le groupe $(T_\ell)_{G_k}$ est fini. En effet, puisque A n'a qu'un nombre fini de points rationnels, l'action de F sur T_ℓ est sans point fixe. On en déduit que $\det(1-F) \neq 0$ et alors il suffit d'appliquer la première partie de 4.3.1.

On souhaite néanmoins un énoncé plus précis : il faut montrer que $|T_\ell/((1-F)T_\ell)|$ est un singleton hormis pour un nombre fini de premiers ℓ. Or d'après 4.3.1, la conjecture de Weil pour les variétés abéliennes donne

$$|T_\ell/((1-F)T_\ell)| = \ell^{v_\ell(\det(1-F))} = \ell^{v_\ell(|A(k)|)}$$

et le théorème de Katz-Lang est démontré.

4. Sorites divers

4.1. Le morphisme de spécialisation. — La bijection (3.2.2) joue le rôle du transport parallèle pour les systèmes locaux en géométrie complexe. Elle n'est qu'une manifestation du fait que le morphisme de spécialisation est un isomorphisme pour les faisceaux représentables. Par souci d'exhaustivité (et aussi du fait de l'ignorance du rédacteur concernant la spécialisation), on détaille ici les rudiments concernant le morphisme de spécialisation.

Soit X un schéma, $x_1, x_2 \in X$ et $\overline{x}_1$ (resp. $\overline{x}_2$) un point géométrique localisé en x_1 (resp. x_2). Suivant [**Gro72**, VIII 7.3], on a le

Lemme 4.1.1. — *Le morphisme de restriction*

$$\mathrm{Hom}_X(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}, X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\overline{x}_1, X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2})$$

est une bijection.

Démonstration. — Notons $C(\overline{x}_2)$ la catégorie des diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "\text{étale}"] \\ \overline{x}_2 \arrow[ur] \arrow[r] & X \end{tikzcd} \tag{4.1.2}$$

Alors par définition de $X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2}$ et de la notion de colimite, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_X(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}, X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2})] \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_X(\overline{x}_1, X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2}) \arrow[d, "\wr"] \\ \varprojlim_{C(\overline{x}_2)} \mathrm{Hom}_X(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}, U) \arrow[r] & \varprojlim_{C(\overline{x}_2)} \mathrm{Hom}_X(\overline{x}_1, U) \end{tikzcd}$$

Pour U comme dans (4.1.2), on doit donc montrer que

$$\mathrm{Hom}_X(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\overline{x}_1, U) \tag{4.1.3}$$

est une bijection. Or pour tout triplet de schémas X, Y, Z, on a une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_Z(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_X(X, X \times_Z Y)$$

On en déduit un diagramme commutatif à flèches verticales bijectives

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_X(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}, U) \arrow[r] \arrow[dd, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_X(\overline{x}_1, U) \arrow[d, "\wr"'] \\ & \mathrm{Hom}_{\overline{x}_1}(\overline{x}_1, U_{\overline{x}_1}) \\ \mathrm{Hom}_{X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}}(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}, U \times_X X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}}(\overline{x}_1, U \times_X X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

On est donc ramené à montrer la bijectivité de (4.1.3) dans le cas où $X = X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}$.

Mais dans ce cas, le résultat est trivial. En effet, les revêtements étales finis de $X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}$ sont triviaux, donc U est une réunion disjointe d'un nombre fini de copies de $X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}$. Par connexité de $X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}$, un élément de $\mathrm{Hom}_{X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}}(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}, U)$ n'est alors ni plus ni moins que le morphsime identité de $X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}$ sur l'une de ces copies. Ceci étant compris, il est manifeste que (4.1.3) est une bijection. □

Remarque 4.1.4. — On observera que les morphismes entre $X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}$ et $X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2}$ envisagés dans ce lemme ne sont pas nécessairement locaux!!

Corollaire 4.1.5. — *Dans les conditions précédentes, le membre de gauche de* (4.1.1) *est non vide si et seulement si* $x_2 \in \overline{\{x_1\}}$.

Démonstration. — Considérons

$$X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x_2} \longrightarrow X$$

Si le membre de gauche de (4.1.1) est non vide, alors on dispose d'un X-morphisme $\overline{x}_1 \longrightarrow X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2}$. Par composition, on obtient que x_1 est dans l'image de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x_2} \longrightarrow X$, d'où le résultat.

Supposons réciproquement que $x_2 \in \overline{\{x_1\}}$. On dispose alors d'un relèvement canonique

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x_2} \arrow[d] \\ x_1 \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

d'où un morphisme canonique

$$f : \overline{x}_1 \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x_2} \tag{4.1.6}$$

Soit $g : U \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x_2}$ un revêtement étale fini. On sait que $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x_2}$ est connexe. Or g est à la fois ouverte et fermée, d'où on déduit que g est surjective. Soit $u \in U$ un point au-dessus $f(\overline{x}_1)$. Par hypothèse, l'extension $\kappa(f(\overline{x}_1)) \subset \kappa(u)$ est séparable finie. On peut donc trouver un $\kappa(f(\overline{x}_1))$-plongement de $\kappa(u)$ dans $\kappa(\overline{x}_1)$, soit encore un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \kappa(u) \arrow[dl] \\ \kappa(\overline{x}_1) & \kappa(f(\overline{x}_1)) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

d'où on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d] \\ \overline{x}_1 \arrow[ur] \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x_2} \end{tikzcd}$$

Par finitude de g, il n'existe qu'un nombre fini de tels diagrammes. Par conséquent, $\mathrm{Hom}_X(\overline{x}_1, X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2})$ peut s'écrire comme limite projective[12] d'ensembles finis non vides. Par théorème de Tychonoff, on en déduit que $\mathrm{Hom}_X(\overline{x}_1, X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2})$ est non vide. $\square$

On rappelle que si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de schémas, et $\mathcal{F}$ un faisceau sur le site étale de Y, alors $f^*\mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$f^*\mathcal{F}^{\mathrm{pre}} : U \longrightarrow \varinjlim_{D(U)} \mathcal{F}(V) \tag{4.1.7}$$

où la catégorie indexatrice $D(U)$ est la catégorie des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "\text{étale}"'] & V \arrow[d, "\text{étale}"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Par définition, on a

$$H^0(U, f^*\mathcal{F}) = \varinjlim_{\underline{U}} \check{H}^0(\underline{U}, f^*\mathcal{F}^{\mathrm{pre}})$$

où la limite court sur les recouvrements de U.

Dans le cas du morphisme canonique $X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}} \longrightarrow X$, il y a pour $U = X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}}$ un recouvrement plus fin que tous les autres, à savoir $X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}}$ lui-même. On en déduit que $H^0(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}}, \mathcal{F}_{|X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}}})$ est aussi le $H^0(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}}, \quad)$ du préfaisceau (4.1.7), soit encore

$$H^0(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}}, \mathcal{F}_{|X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}}}) = \varinjlim_{D(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}})} \mathcal{F}(V)$$

D'après 4.1.1, le morphisme de restriction $\overline{x} \longrightarrow X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}}$ induit une équivalence de catégorie $D(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}}) \simeq C(\overline{x})$. On en déduit que $H^0(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}}, \mathcal{F}_{|X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}}})$ est exactement la fibre de $\mathcal{F}$ en $\overline{x}$.

Si $x_2 \in \overline{\{x_1\}}$, alors (4.1.5) assure l'existence d'un morphisme de spécialisation $X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1} \longrightarrow X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2}$, dont on déduit un morphisme

$$H^0(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2}, \mathcal{F}_{|X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2}}) \longrightarrow H^0(X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}, \mathcal{F}_{|X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1}})$$

qui par la discussion précédente n'est ni plus ni moins qu'un morphisme

$$\mathcal{F}_{\overline{x}_2} \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{x}_1} \tag{4.1.8}$$

---

[12] Il est important ici que la catégorie indexatrice soit un ensemble pré-ordonné *dirigé*. La catégorie des diagrammes

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "\text{étale fini}"] \\ \overline{x}_2 \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x_2} \end{tikzcd}$$

convient.

On l'appelle *morphisme de spécialisation.* Il est du point de vue "fibre" donné par la procédure qui suit. Soit $((4.1.2), s) \in \mathcal{F}_{\overline{x}_2}$. Le diagramme (4.1.2) donne par (4.1.3) un diagramme

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "\text{étale}"] \\ X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2} \arrow[r] \arrow[ur] & X \end{tikzcd}$$

A l'aide de $\overline{x}_1 \longrightarrow X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_1} \longrightarrow X^{\mathrm{sh}}_{\overline{x}_2}$, on en déduit un diagramme

(4.1.9)
$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "\text{étale}"] \\ \overline{x}_1 \arrow[r] \arrow[ur] & X \end{tikzcd}$$

l'image de $((4.1.2), s)$ par le morphisme de spécialisation (4.1.8) est $((4.1.9), s) \in \mathcal{F}_{\overline{x}_1}$.

4.2. Fibre géométrique. — Considérons le diagramme cartésien

(4.2.1)
$$\begin{tikzcd} Y_{\overline{x}} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\text{étale fini}"] \\ \overline{x} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

où $\overline{x}$ est un point géométrique de X. Alors on a une bijection canonique

$$Y_{\overline{x}} \simeq \mathrm{Hom}_X(\overline{x}, Y)$$

En effet, $Y_{\overline{x}}$ est en bijection avec les sections de $Y_{\overline{x}} \longrightarrow \overline{x}$, d'où par composition avec $Y_{\overline{x}} \longrightarrow Y$ une application

(4.2.2)
$$Y_{\overline{x}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\overline{x}, Y)$$

Du fait qu'un morphisme étale fini est affine, sur un voisinage affine $\mathrm{Spec}\, B$ du point x de X en lequel $\overline{x}$ est localisé, (4.2.1) devient

(4.2.3)
$$\begin{tikzcd} A \otimes_B k & A \arrow[l] \\ k \arrow[u] & B \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

En particulier, la flèche supérieure de (4.2.3) est une surjection. On en déduit que (4.2.2) est une injection. C'est aussi une surjection par définition même du produit fibré.

4.3. Un petit lemme d'algèbre linéaire. — Notons v_ℓ la valuation de $\mathbb{Z}_\ell$.

Lemme 4.3.1. — *Soit E un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang fini et $f : E \longrightarrow E$ un morphisme linéaire. Alors, $\det f$ est non nul si et seulement si le cardinal $|E/f(E)|$ de $E/f(E)$ est fini, et alors on a*

$$|E/f(E)| = \ell^{v_\ell(\det f)}$$

Démonstration. — En appliquant le théorème de la base adaptée au sous-espace $f(E)$ de E, on peut se donner une base $\mathbf{e} = e_1, \ldots, e_n$ de E et des entiers ℓ-adic $d_1, \ldots, d_k$, $k \leqslant n$ tels que

$$f(E) = \mathbb{Z}_\ell d_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_\ell d_k$$

On en déduit

$$E/f(E) = \mathbb{Z}_\ell^{n-k} \oplus \mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell d_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell d_k \tag{4.3.2}$$

En particulier, $E/f(E)$ est fini si et seulement si $n = k$. Or si $n = k$, l'extension de f à $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} E$ est un isomorphisme, donc son déterminant (qui est le même que celui de f) est non nul. Si $n \neq k$, l'image de $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} f$ est un sous-espace strict de $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} E$, donc $\det f = 0$. D'où la première assertion de 4.3.1.

On se place dans le cas où $E/f(E)$ est fini. Alors d'après (4.3.2), on a

$$v_\ell(|E/f(E)|) = v_\ell(d_1) + \cdots + v_\ell(d_n)$$

Or on observe que $\mathbf{e}'' = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de rang n de $f(E)$. Cela en est donc une base. Une autre base de $f(E)$ est donnée par $\mathbf{e}' = (d_1 e_1, \ldots, d_n e_n)$. La matrice des coefficients de $\mathbf{e}''$ dans $\mathbf{e}'$ est donc de déterminant inversible dans $\mathbb{Z}_\ell$. La matrice des coefficients de $\mathbf{e}'$ dans $\mathbf{e}$ est $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, et on en déduit

$$\det f = d_1 \cdots d_n \times \text{un inversible}$$

d'où $v_\ell(\det f) = v_\ell(d_1) + \cdots + v_\ell(d_n)$ et le lemme est prouvé.

□

Références

[GD61] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique III*, vol. 11, Publications Mathématiques de l'IHES, 1961.

[Gro71] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 263, Springer-Verlag, 1971.

[Gro72] ———, *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 270, Springer, 1972.

[KL81] N. Katz and S. Lang, *Finiteness theorems in geometric class field theory*, L'Enseignement Math. **27** (1981).

J.-B. Teyssier, Freie Universität Berlin, Mathematisches Institut, Arnimallee 3, 14195 Berlin, Germany • *E-mail :* teyssier@zedat.fu-berlin.de